HET VECTORDIAGRAM

Doel

Het vectordiagram is een hulpmiddel bij het **optellen** van sinusvormige stromen of spanningen.

Theorie

Een sinusvormige spanning of stroom wordt niet alleen bepaald door zijn amplitude (waarde in de toppen), maar ook door zijn fase (het tijdstip waarop een kenmerkend punt van de sinuskromme wordt bereikt). De spanningen I en II in figuur 1 hebben wel

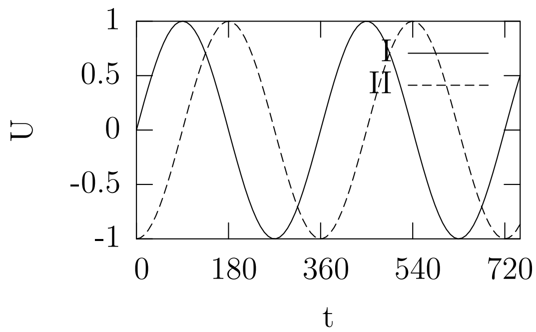

Figure 1: Twee spanningen I en II, II 90 graden achter, ampl. beiden 1 V

dezelfde amplitude maar **niet** de zelfde fase (II loopt 90^o achter op I).

Als we twee gelijkspanningen +/- in serie zetten dan wordt de totale spanning de som van de twee spanningen. Die somspanning is constant, dus onafhankelijk van de tijd.

Voor het optellen van de spanningen I en II uit figuur 1 ligt dat anders. We moeten daarvoor bij elke postitie op de t-as de waarde van spanning I en II bij elkaar optellen. Het resultaat is nu afhankelijk van waar we dat op de t-as doen. We krijgen dan een nieuwe sinusvormige wisselspanning, maar de toppen en de nuldoorgangen liggen op andere plaatsen en de amplitude (hoogte van de toppen) is ook anders geworden, zie figuur 2. Ook

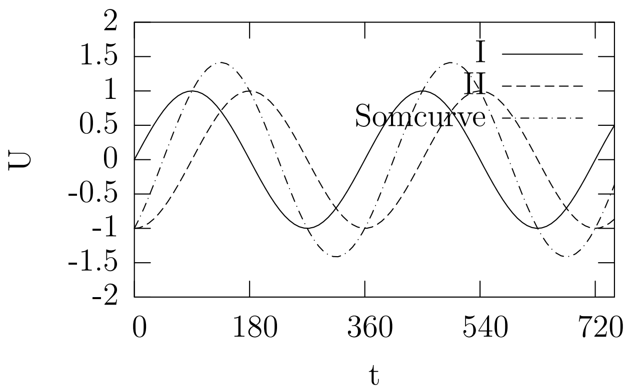

Figure 2: De spanningen I en II opgeteld geven Somcurve

is in te zien dat het resultaat afhankelijk is van de onderlinge verschuiving van spanning I ten opzichte van spanning II (hun faseverschil). Zouden I en II een faseverschil van 180^o hebben dan blijkt de somspanning op ieder tijdstip 0 te zijn (zie figuur 3).

Het vectordiagram

In een vectordiagram wordt een wisselspanning (of -stroom) voorgesteld als een pijl vanuit de oorsprong van een X/Y-assenkruis. De lengte van de pijl stelt de amplitude voor, de hoek die de pijl maakt met de positieve X-as geeft de fase aan. Een pijl langs de X-as

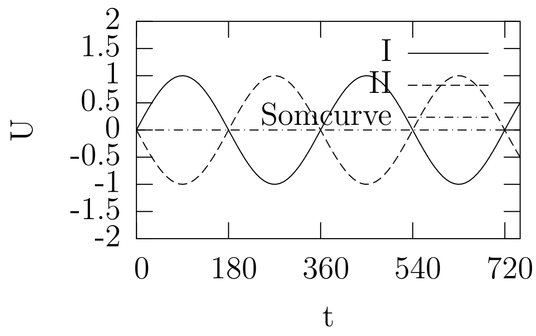

Figure 3: Bij optellen van I en II is de somcurve overal 0

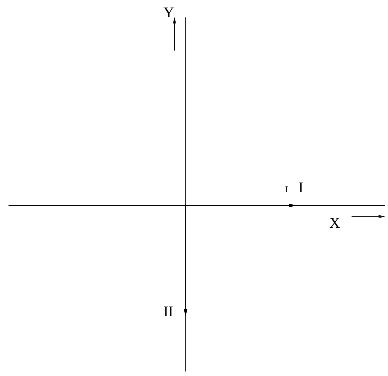

Figure 4: Vectoren voor I en II, II 90^0 achter

in positieve richting geven we een fasehoek van 0^o. De -/+ doorgang van spanning I in de figuren 1 t/m 3 ligt op t=0. Als we dat tijdstip als basis 0^o nemen dan komt de spanning I dus als een pijl langs de positieve X-as te liggen. Afspraak is nu om spanningen die **voorlopen** (eerder beginnen) met een fasehoek linksom vanuit de positieve X-as te tekenen en die achterlopen rechtsom (net als bij klok, rechtsom wordt het later, zie ook bijlage I van de aanvulling van het cursusboek).

Maken we nu het vectordiagram voor de situatie van figuur 1 dan krijgen we figuur 4. Het blijkt, en dat is wiskundig te bewijzen, dat we de vector van de somspanning (ook wel resultante genoemd) kunnen vinden met de constructie uit figuur 5. De resultante is daar dus de diagonaal in de rechthoek met als zijden de spanningen I en II. Omdat de spanningen I en II dezelfde amplitude hebben is de hoek met de positieve X-as 45^o. De resultante ligt onder de positieve X-as (dus later). De somspanning loopt dus 45^o achter bij de spanning I. (Ga dit na in figuur 2). De amplitude is de lengte van de hypothenusa van een gelijkzijdige rechthoekige driehoek. Die is $\sqrt{2}$ x zo groot als de rechthoekzijde, dus ongeveer 1,4 x zo groot als de oorsponkelijke spanningen. Klopt dit ook met figuur 2?

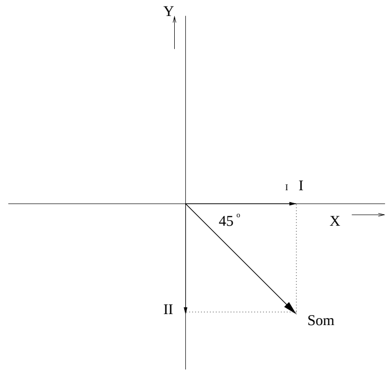

Figure 5: Constructie vector van de somspanning

Het zal duidelijk zijn dat het tekenen van figuur 5 aanzienlijk minder werk is dan het tekenen van figuur 2.

Gebruik van het vectordiagram

Het vectordiagram kunnen we gebruiken om zowel wisselspanningen als wisselstromen op te tellen.

Optellen wisselspanningen

Het optellen van wisselspanningen is aan de orde als we de totale **spanning** over een **serieschakeling** van afzonderlijke componenten willen berekenen. Door alle elementen loopt **dezelfde** stroom. Die nemen we dus als basis (fasehoek = 0^o) langs de positieve X-as. Per component berekenen we de spanningsval met de wet van Ohm (U = I x R). Als de component geen gewone Ohmse weerstand is dan gebruiken we de reactantie (X_L of X_C).

Vevolgens zetten we de pijlen van de vectoren met als lengte de berekende spanningsval over de component in het vectordiagram. Voor een gewone weerstand R ligt die vector langs de positieve X-as (spanning en stroom zijn in fase). Voor een zelfinductie L ligt de vector langs de positieve Y-as (spanning loopt voor op de stroom) en voor een capaciteit C ligt de vector langs de negatieve Y-as (spanning loopt achter bij de stroom).

Tenslotte bepalen we de resultante. Vectoren die langs dezelfde as liggen mogen we gewoon optellen (als ze dezelfde kant uitstaan) of aftrekken (als ze in tegenovergestelde richtingen wijzen). Uit de twee overblijvende vectoren langs de X-as en de Y-as bepalen we de resultante als de diagonaal in de rechthoek (zoals in figuur 5). De lengte daarvan stelt dan de totale spanning voor en de hoek die hij maakt met de positieve X-as stelt de fasehoek tussen deze totale spanning en de stroom voor. Het aantal graden dat je linksom afleest is het aantal graden dat de spanning voorloopt op de stroom. Lees je het aantal graden met de positieve X-as rechtsom af dan is dat de waarde waarmee de spanning achterloopt op de stroom.

Voorbeeld

Door de schakeling van figuur 6 loopt een hf-stroom van 1 A (amplitude). De stroom heeft een frequentie van 1MHz. R is 50Ω, C = 1.6 nF en L = $8\mu H$. Bereken de spanning tussen

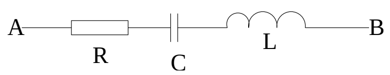

Figure 6: Serieschakeling R, C en L

de punten A en B en de fasehoek tussen de stroom en deze spanning. Loopt de spanning voor of achter op de stroom?

Uitwerking

We gaan nu met behulp van de wet van Ohm de spanningen berekenen over de afzonderlijke componenten.

R: $U_R = I * R = 1 * 50 = 50$ V

C: $U_C = I * X_C$
$X_C = \frac{1}{2*\Pi*f*C} = \frac{1}{2*3,14*10^6*1,6.10^{-9}} = 100\Omega$
dus $U_C = 1 * 100 = 100V$

L: $U_L = I * X_L$
$X_L = 2*\Pi*f*L = 2*3,14*10^6*8.10^{-6} = 50\Omega$
dus $U_L = 1 * 50 = 50V$

Het vector diagram: De vector voor

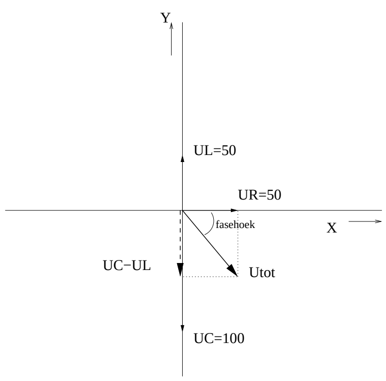

Figure 7: Vectordiagram met $U_R, U_C en U_L$

U_{tot} blijkt de diagonaal te zijn in een vierkant met als zijden U_R en $U_C - U_L$ die elk de waarde 50 V hebben. De lengte van deze vector is $\sqrt{2} * 50 = 71$V. Hij maakt een hoek van 45^o met de positieve X-as naar beneden (later). De fasehoek tussen de stroom en de totale spanning over de schakeling is dus 45^o. De spanning loopt **achter** op de stroom. De berekening van de lengte van de resultante als diagonaal van zo'n rechthoek gaat met de stelling van Pythagoras die zegt dat de lengte van een schuine zijde (hypothenusa) van een rechthoekige driehoek gelijk is aan de wortel uit de som van de kwadraten van de rechthoekszijden (zie figuur 8). Controleren we dat voor figuur 7 dan krijgen

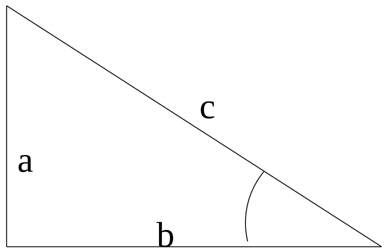

Figure 8: Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

we $U_{tot} = \sqrt{50^2 + 50^2} = 70,7$V. Ook voor het berekenen van de hoek is een formule: $hoek = arctan(a/b)$ De functie arctangens is de inverse van de functie tangens. Op de casio rekenmachine staat daar tan^{-1} bij. Controleren we dat voor de figuur 7 dan krijgen we op de rekenmachine $50/50 = 1 tan^{-1} 45$.

Optellen wisselstromen

Het optellen van wisselstromen is aan de orde als we de totale stroom door een **parallelschakeling** van afzonderlijke componenten willen berekenen. Over alle componenten staat nu **dezelfde spanning**. Die nemen we nu als basis (fasehoek = 0^o) langs de positieve X-as. Per component bereken we nu de **stroom** met de wet van Ohm in de vorm $I = \frac{U}{R}$. Als de component geen gewone weerstand is gebruiken we weer zijn reactantie, (X_L of X_C).

Hebben we de stroomsterktes door alle aparte componenten uitgerekend dan gaan we voor het bepalen van de totale stroom weer het vectordiagram gebruiken omdat je wisselstromen niet zomaar kunt optellen (net zomin als spanningen) vanwege het feit dat hun onderlinge faseverschillen ook van belang zijn.

Bij het tekenen van de stroomsterktes door de afzonderlijke componenten gaan we als volgt te werk. De stroom door een gewone weerstand tekenen we als een pijl langs de positieve X-as (zelfde richting als de spanning) omdat bij een gewone weerstand spanning en stroom in fase zijn. De stroom door een condensator tekenen we als een pijl vanuit de oorsprong recht omhoog langs de positieve Y-as want voor een condensator loopt de stroom 90^o voor op de spanning die langs de positieve X-as ligt. De stroom door een zelfinductie tekenen we als een pijl vanuit de oorsprong verticaal omlaag, langs de negatieve Y-as omdat voor een zelfinductie de stroom 90^o achterloopt op de spanning. De lengte van de pijlen moeten overeenkomen met de stroomsterktes door de betrokken componenten.

Het bepalen van de totale stroom (resultante) gaat op dezelfde manier als eerder beschreven voor spanningen.

Voorbeeld

Bereken de totale stroom door de schakeling tussen de punten A en B als er tussen die punten een hf-wisselspanning staat van 100 V als de frequentie van die spanning 1 MHz bedraagt. De componenten hebben dezelfde waarde als in figuur 6. Ook de frequentie is

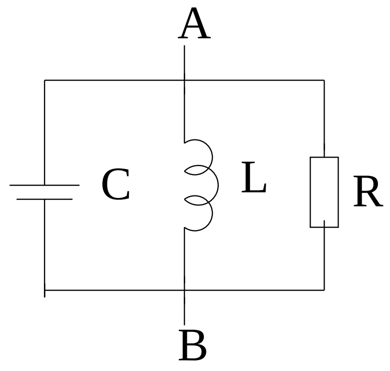

Figure 9: Parallelschakeling van C, L en R

hetzelfde (1MHz), dus de reactanties zijn ook hetzelfde: $X_L = 50\Omega$ en $X_C = 100\Omega$. De lengte van de pijl van I_R moet dus worden $100/50 = 2$ A. Voor I_L berekenen we $100/50 = 2$ A en voor $I_C = 100/100 = 1$ A. Het vector diagram komt er nu als volgt uit te zien: Nu kunnen we in de driehoek Oor-

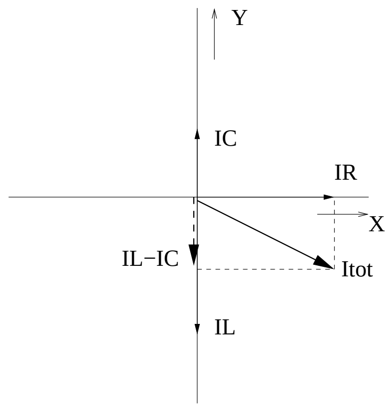

Figure 10: Vectordiagram stromen door C, L en R

sprong, I_R en I_{tot} de lengte van I_{tot} (de hypothenusa) uitrekenen met Pythagoras: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,2A$. De fasehoek tussen stroom en spanning volgt uit $hoek = arctan(1/2) = 26{,}5^o$ en de stroom loopt achter op de spanning.